Teorie 28.1.

pátek 29. ledna 2021 0:25

(1) (c)

(i) neplatí, příkladem může být $f(x) = x$, $x \in [-2,-1]$

(ii) neplatí, příkladem může být $f(x) = \begin{cases} x, & \in (-2,-1) \\ 0, & x = -2, -1 \end{cases}$

(iii) platí, podle Rolleovy věty

(iv) platí, protože f je nekonstantní existuje $a \in (-2,-1)$, že $f(a) \neq f(-2)$. Pokud $f(a) > f(-2)$, potom podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existují $x \in (-2, a)$ a $y \in (a,-1)$, že

$$f'(x) = \frac{f(a) - f(-2)}{a-(-2)} > 0 > \frac{f(-1) - f(a)}{-1-a} = f'(y).$$

Tedy $f'(x) \cdot f'(y) < 0$.

Podobně pro $f(a) < f(-2)$.

(2) (b) položme $a_n = F(n^2) - F(-n^2) = \int_{-n^2}^{n^2} f$.

Potom
$$a_{n+1} - a_n = \int_{-(n+1)^2}^{-n^2} f + \int_{n^2}^{(n+1)^2} f > 0 .$$

Tedy $\{a_n\}$ je rostoucí a tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existuje.

Protože $a_1 = \int_{-1}^{1} f > 0$ platí $L > 0$.

(3) (C) (i) neplatí, příklad $A=\emptyset$

(ii) platí, $\sup(A)$ i $\sup(B)$ jsou horními závorami $A\cap B$, tedy $\sup(A\cap B)\leq \min(\sup(A),\sup(B))$.

($\sup(A\cap B)$, $\sup(A)$ i $\sup(B)$ existují protože $A\cap B\neq\emptyset$)

(iii) neplatí, například pro $A=\{0,1\}$, $B=\{0,2\}$ máme

$$\sup(A\cap B)=\sup(\{0\})=0<1=\min(\sup A,\sup B)$$

(iv) platí, nechť $s=\sup A$. Potom existuje $n\in A$, že $n>s-1$. Pokud $n=s$, pak je $\sup A$ splně, pokud $n<s$ potom existuje $m\in A$, že $m>n$. Potom ale

$s-1<n<m\leq s$, což není možné.

(např. by to znamenalo $n=\lfloor s\rfloor=m$, což nelze pro $n<m$)